

Feuille 9 : Fractions rationnelles

Exercice 1. Donner la forme de la décomposition en éléments simples, sur \mathbb{R} puis sur \mathbb{C} , des fractions rationnelles suivantes.

a) $\frac{1}{(X+1)(X-2)}, \quad \frac{X}{(X+1)(X-2)}, \quad \frac{X}{X^2-1}.$

b) $\frac{X+1}{X^2+1}, \quad \frac{X^2}{X^3-1}.$

c) $\frac{X-1}{X^2(X^2+1)}, \quad \frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}.$

d) $\frac{X^4}{X^2-3X+2}, \quad \frac{X^4-X+2}{(X-1)(X^2-1)}.$

Solution : a) racines réelles :

feuille 6, exercice 1, $\frac{-1/3}{X+1} + \frac{1/3}{X-2}$, feuille 6, exercice 1, $\frac{1/3}{X+1} + \frac{2/3}{X-2}$, feuille 6, exercice 5, $\frac{1/2}{X-1} + \frac{-1/2}{X+1}$

b) racines complexes :

feuille 6, exercice 5, $\frac{X+1}{X^2+1} = \frac{1/2-i/2}{X-i} + \frac{1/2+i/2}{X+i},$

feuille 6, exercice 5, $\frac{X^2}{X^3-1} = \frac{1/3}{X-1} + \frac{2X/3+1/3}{X^2+X+1} = \frac{1/3}{X-1} + \frac{1/3}{X-j} + \frac{1/3}{X-j^2}$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

c) racines multiples :

feuille 6, exercice 2 $\frac{1}{X} - \frac{1}{X^2} + \frac{-X+1}{X^2+1} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X^2} + \frac{-1/2-i/2}{X-i} + \frac{-1/2+i/2}{X+i}$

feuille 6, exercice 4, $\frac{X+1}{X^2+X+1} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} = \frac{1/2-\sqrt{3}i/6}{X-j} + \frac{1/2+\sqrt{3}i/6}{X-j^2} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}$,

où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

d) division euclidienne :

feuille 6, exercice 1, $X^2 - 3X - 11 + \frac{-27X+22}{X^2-3X+2} = X^2 - 3X - 11 + \frac{5}{X-1} + \frac{-32}{X-2}$

feuille 6, exercice 3, $X+1 + \frac{2X^2-X+1}{(X-1)(X^2-1)} = X+1 + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1}$

Exercice 2. Décomposer en éléments simples sur \mathbb{R} la fraction

$$F(X) = \frac{1}{(X^2+1)^2 - X^2}.$$

Indication : Noter que F est paire, *i.e.* $F(X) = F(-X)$.

Solution : Voir feuille 6, exercice 6.

Exercice 3. Rappelez les primitives des éléments simples suivantes pour $x > 0$.

a) $\int x^n dx, \quad n \in \mathbb{N},$

b) $\int \frac{1}{x} dx,$

c) $\int \frac{1}{x^n} dx, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2,$

d) $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx, \quad a > 0.$

Solution : a) $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, b) $\ln|x| + C$, c) $-\frac{n}{x^{n+1}} + C$, d) $\frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$

Exercice 4. Calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes en mentionnant les intervalles où le calcul est valable.

$$F_1(x) = \int \frac{x^2}{1+x^2} dx, \quad F_2(x) = \int \frac{x}{x^2-3x+2} dx, \quad F_3(x) = \int \frac{dx}{x(x-1)(x-2)},$$

$$F_4(x) = \int \frac{x^4}{x^3-3x+2} dx, \quad F_5(x) = \int \frac{dx}{x^3-1}.$$

Solution : Voir feuille 9, exercice 1.